

۱- مطلوب است محاسبه مساحت سطح محدود به منحنی $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1$ و واقع در ربع اول. حل. در اینجا دامنه عبارت است از $0 \leq x, 0 \leq y, \sqrt[4]{x/a} + \sqrt[4]{y/b} \leq 1$. با فرض $x = au \cos^2 v$ و $y = bu \sin^2 v$ داریم

$$J = \left| \det \begin{bmatrix} a \cos^2 v & -2au \sin v \cos v \\ b \sin^2 v & 2b \sin v \cos v \end{bmatrix} \right| = |abu \sin(2v)| \quad ; \quad D' : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi/2$$

در نتیجه

$$\text{Area}(D) = \iint_D dA = \iint_{D'} |abu \sin(2v)| dA' = ab \left(\int_0^1 u du \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin(2v) dv \right) = ab \times \frac{1}{2} \times 2 = ab$$

۲- مقدار انتگرال $\iiint_V z dV$ که در آن V حجم واقع در یک هشتم اول مختصات، و بالای صفحه $z = x + y - 1$ و زیر صفحه $z = 1$ است، را محاسبه کنید.

حل. با توجه به صورت مسأله، حدود ناحیه مورد نظر چنین است:

$$V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - x, x + y - 1 \leq z \leq 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_V z dV &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_{x+y-1}^1 z dz \right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}(x+y-1)^2 \right) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left[y - \frac{1}{3}(x+y-1)^3 \right]_0^{2-x} dx = \frac{1}{6} \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 4) dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

۳- انتگرال تابع $|xyz|$ را بر ناحیه محدود به بیضی گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ محاسبه کنید.

حل. از مختصات کروی و زنادار $x = a \rho \sin \varphi \cos \theta, y = b \rho \sin \varphi \sin \theta, z = c \rho \cos \varphi$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $J = abc \rho^2 \sin \varphi$ و ناحیه تصویر شده عبارت است از $0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1$. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iiint_V |xyz| dV &= \iiint_{V'} |(a \rho \sin \varphi \cos \theta)(b \rho \sin \varphi \sin \theta)(c \rho \cos \varphi)| (abc \rho^2 \sin \varphi) dV, \\ &= a^2 b^2 c^2 \iiint_{V'} \rho^5 \sin^2 \varphi |\cos \varphi \cos \theta \sin \theta| dV' \\ &= a^2 b^2 c^2 \left(\int_0^1 \rho^5 d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin^2 \varphi |\cos \varphi| d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} |\cos \theta \sin \theta| d\theta \right) \\ &= 8a^2 b^2 c^2 \left(\int_0^1 \rho^5 d\rho \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= 8a^2 b^2 c^2 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} a^2 b^2 c^2 \end{aligned}$$

۴- مطلوب است محاسبه جرم قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ که توسط استوانه $x^2 + y^2 = 2x$ جدا شده است و چگالی در هر نقطه (x, y, z) برابر $\delta = x^2 + y^2 + z^2$ است.

حل. دامنه این مسأله $V : x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ است. آن را به مختصات استوانه‌ای می‌بریم:

$$V' : r^2 \leq 2r \cos \theta, r^2 + z^2 \leq 4 : 0 \leq \cos \theta, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, z^2 \leq 4 - r^2$$

$$: -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$$

در نتیجه، با فرض $u = \sqrt{4 - r^2}$ داریم

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \delta dV = \iiint_{V'} (r^2 + z^2) r dV' = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} \left(\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} (r^2 + z^2) r dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} \left[(r^2 z + r \frac{z^3}{3}) \right]_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dr \right) d\theta = \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} r(r^2 + 2) \sqrt{4 - r^2} dr \right) d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{2 \sin \theta}^2 u^2 (u^2 - 2) du \right) d\theta = \frac{32}{15} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2 \sin^4 \theta + 3 - 5 \sin^2 \theta) d\theta = \frac{32}{5} \end{aligned}$$

۵- قضیه گرین را برای میدان برداری $\mathbf{F} = (x^2 - xy)\mathbf{i} + (xy - y^2)\mathbf{j}$ و C مثلثی با رئوس $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ و $(2, 0)$ ، بررسی کنید. حل. الف) محاسبه مستقیم. در اینجا با فرض $O = (0, 0)$ ، $A = (1, 1)$ و $B = (2, 0)$ ، داریم $C = \triangle OBA$ یا $C = OB \cup BA \cup AO$ که در آن

$$OB : \mathbf{r}(t) = (1-t)O + tB = (2t, 0) ; 0 \leq t \leq 1$$

$$BA : \mathbf{r}(t) = (1-t)B + tA = (2-t, t) ; 0 \leq t \leq 1$$

$$AO : \mathbf{r}(t) = (1-t)A + tO = (1-t, 1-t) ; 0 \leq t \leq 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{OB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{AO} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^1 (4t^2, 0) \cdot (2, 0) dt + \int_0^1 (2t^2 - 6t + 4, 2t - 2t^2) \cdot (-1, 1) dt + \int_0^1 (0, 0) \cdot (-1, -1) dt \\ &= 4 \int_0^1 (t^2 + 2t - 1) dt = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ب) با استفاده از قضیه. داخل مثلث را به صورت $D : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2 - y$ می‌توان نوشت، در نتیجه

$$\iint_D (Q_x - P_y) dA = \iint_D (x + y) dA = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x + y) \right) dy = 2 \int_0^1 (1 - y^2) dy = \frac{4}{3}$$

۶- قضیه استوکس را برای میدان نیروی $\mathbf{F} = (y + 2z)\mathbf{i} + (z + 2x)\mathbf{j} + (x + 2y)\mathbf{k}$ و منحنی C تحقیق کنید:

$$C : \mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, \cos t + \sin t) ; 0 \leq t \leq 2\pi$$

حل. الف) محاسبه مستقیم. با توجه به اینکه منحنی پارامتره شده است، داریم

$$\begin{aligned} \oint_C C\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t + 3 \sin t, 5 \cos t + \sin t, 2 \cos t + 2 \sin t) \cdot (-2 \sin t, \cos t, -\sin t + \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (7 \cos^2 t - 8 \sin^2 t - \sin t \cos t) dt = -\pi \end{aligned}$$

ب) با استفاده از قضیه. این منحنی محل برخورد صفحه $z = x + 2y$ و استوانه $x^2/4 + y^2 = 1$ است. بنابراین آن را به صورت لبه قسمتی از صفحه $z = x + 2y$ می‌توان تصور نمود که توسط استوانه $x^2/4 + y^2 = 1$ جدا شده است. به عبارت دیگر، لبه رویه زیر:

$$S : z = x/2 + y, (x, y) \in D \quad , \quad D : x^2/4 + y^2 \leq 1$$

به این ترتیب با فرض $f = 2z - x - 2y$ ، داریم

$$\mathbf{n} = \pm \frac{f'}{\|f'\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2, 2) \quad , \quad d\sigma = \frac{\|f'\|}{|f'_z|} dx dy = \frac{\sqrt{5}}{2} dx dy$$

که با توجه به جهت C ، حالت مثبت در \mathbf{n} مورد قبول است. بعلاوه

$$\text{Curl}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y + 2z & z + 2x & x + 2y \end{vmatrix} = (1, 1, 1)$$

و در نتیجه

$$\iint_{(S)} \text{Curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{\sqrt{5}} \iint_D (1, 1, 1) \cdot (-1, -2, 2) dx dy = -\frac{1}{\sqrt{5}} \iint_D dx dy = -\frac{1}{\sqrt{5}} \text{Area}(D) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \pi \times 1 \times 2 = -\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

۷- در صورتی که $\mathbf{F} = -\frac{1}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ باشد، که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ، قضیه دیورژانس را برای ناحیه محدود به دو کره $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ بررسی کنید.

حل. الف) محاسبه مستقیم. از مختصات قطبی برای پارامتره نمودن کره‌های مورد نظر استفاده می‌کنیم:

$$S = S_1 \cup S_2 \quad ; \quad D : 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$S_1 : \mathbf{r}(\varphi, \theta) = (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \cos \varphi) \quad ; \quad (\varphi, \theta) \in D$$

$$S_2 : \mathbf{r}(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \quad ; \quad (\varphi, \theta) \in D$$

در نتیجه

$$\mathbf{n}_1 d\sigma_1 = \pm \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta d\varphi d\theta = \pm (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) 4 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$\mathbf{n}_2 d\sigma_2 = \pm \mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta d\varphi d\theta = \pm (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta$$

که در حالت اول + و در حالت دوم - مورد قبول است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \iint_{(S_1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \iint_{(S_2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} d\sigma \\ &= \iint_D -\frac{1}{8} (2 \sin \varphi \cos \theta, 2 \sin \varphi \sin \theta, 2 \cos \varphi) \cdot (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) 4 \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &\quad + \iint_D -(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \cdot (-\sin \varphi \cos \theta, -\sin \varphi \sin \theta, -\cos \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

ب) با استفاده از قضیه. داخل رویه داده شده عبارت است از $V : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ و دیورژانس میدان صفر است:

$$\text{div}(\mathbf{F}) = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} \right) = 0$$

در نتیجه

$$\iiint_V \text{div}(\mathbf{F}) dV = 0$$