Page 3-4)

معادله دیفرانسیل توابع زیر را تشکیل دهید.

1) $y = a\sin(bx)$
2) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$
3) $y = x + ce^{-x}$
4) $y = a\sin x + b\cos x$
5) $y = ax + b(1 + x^2)$
6) $y = a + bx$
7) $y = ax + \frac{b}{x}$
8) $y = e^{-x}(a\sin 2x + b\cos 2x)$
9) $y = \frac{2}{c-x^2}$
10) $y = cx + c^2$
11) $y = ae^{bx} + c$
12) $y = ae^{bx+c}$
13) $y = ae^{bx}$

Page 6-7)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2$
2) $y' = xye^{x^2}$
3) $y' = \sec^2 y \sec^2 x$
4) $y' + y^2\sin x = 0$
5) $\sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{1-y^2}dy$

6) $\sqrt{1-x^2}dy = \sqrt{1-y^2}dx$

7) $y' \sin x = y \cos x$

8) $y' + x = xy^2$

9) $x(1+y^2)dx + (1-x^2)ydy = 0$

10) $xe^{x^2-y}dx = ydy$

11) $(1+y)dx - (1-2x)dy = 0$

12) $\sqrt{3xy}dy = dx$

13) $(1+x^2)dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$

14) $x(y^2-1)dx - y(x^2-1)dy = 0$

15) $(x+1)dy + x(y^2+1)dx = 0$

16) $(1+u^2)dx - \sqrt{x}du = 0$

17) $t^2ds = s^2dt$

Page 9-10)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

2) $(x^2+y^2)dx + y^2dy = 0$

3) $x^2dx + (y^2-xy)dy = 0$

4) $\left(2ye^{\left(\frac{y}{x}\right)} - x\right)y' + 2x + y = 0$

5) $(x^3+y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

6) $(x+2y)dx + (2x+3y)dy = 0$

7) $xdy - ydx - \sqrt{x^2-y^2}dx = 0$

8) $y'\left(x + \sqrt{xy}\right) = y$

9) $xy' = x \sec\frac{y}{x} + y$

10) $x \sin\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = y \sin\frac{y}{x} + x$

11) $y' = \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$

Page 12-13)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y' = \left(\frac{x+y+4}{x+y-6}\right)^2$

2) $(x+y-6)dy = (x+y+4)dx$

3) $(x+y-6)dy = (x-y-6)dx$

4) $(2x-6y+1)dy = (x-3y+3)dx$

5) $(x+4y+2)dy = (x+y-1)dx$

6) $(2x+2y-7)dy = (x+y-3)dx$

7) $y' = \frac{5x-y}{2x+2y}$

8) $y' = -\frac{x+2y+3}{2x+4y+5}$

9) $y' = \frac{3x-y+5}{2x+y}$

Page 14)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y' = \sin^2(x-y+2)$

2) $y' = (y-5x)^2$

3) $y' = \frac{2}{2x-y+1}$

4) $y' = \frac{y}{1-y}$

Page 17-18)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$

2) $(2xy+x^3)dx+(x^2+y^2)dy=0$

3) $2x\tan y\,dx+x^2\sec^2 y\,dy=0$

4) $(\cos y+4x^2)dx=x\sin y\,dy$

5) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

6) $e^y dx+(xe^y+2y)dy=0$

7) $(y-x^3)dx+(x+y^3)dy=0$

8) $(3x^2-6xy)dx=(2y+3x^2)dy$

Page 20-21)

1) نشان دهید عوامل انتگرال ساز معادله $ydx-xdy=0$ میتواند به یکی از صورتهای زیر باشد

2) $f(x,y)=\frac{1}{xy}\quad ,\ x,y\neq 0,$

3) $f(x,y)=\frac{1}{x^2}\quad ,\ x\neq 0,$

4) $f(x,y)=\frac{1}{(x-y)^2}\quad ,\ x\neq y,$

5) $f(x,y)=\frac{1}{(x+y)^2}\quad ,\ x\neq -y,$

6) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\quad ,\ x,y\neq 0,$

7) $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}\quad ,\ x\neq \pm y.$

2) فرض کنید معادله $Pdx+Qdy=0$ کامل نباشد، در اینصورت اگر f تابعی از z و $z=k(x,y)$ آنگاه عامل انتگرا ساز f از فرمول زیر بدست می آید :

$$g(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial x}Q-\frac{\partial z}{\partial y}P} \qquad f(z)=e^{\int g(x)dx}$$

3) تمرین قبل را برای $z=x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$, $z=x-y$, $z=x+y$, $z=xy$ بکار برده و فرمولهای مربوطه را بدست آورید.

4) معادلات زیر را حل نمائید :

a) $(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx=(3x+x^2y^2-x^2y^4e^y)dy$

b) $(x^4+y^4)dx=xy^3dy$

c) $xdy-ydx=(4x^2+y^2)dy$

d) $(x^2y^3+x)dy=-ydx$

e) $(x^2+y^2-x)dx-ydy=0$

f) $dy=(\sin 2x-y\tan x)dx$

g) $xdx+ydy=3y^2\sqrt{x^2+y^2}dy$

h) $ydx+xdy=\sqrt{x^2+y^2}(xdx+ydy)$

i) $xdy-ydx=(2x^2+3y^2)(2xdx+3ydy)$

j) $(y+\ln x)dx=xdy$

k) $ydx+xdy=\sqrt{4x^2+9y^2}(4xdx+9ydy)$

Page 23)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $xdy+ydx+3x^3y^4dy=0$

2) $xdy=(y+x^2+9y^2)dx$

3) $ydx-xdy=xy^3dy$

4) $ydx + (x^2y - x)dy = 0$

5) $y^2dx = (x^3 - xy)dy$

6) $y' \ln(x - y) - 1 = \ln(x - y)$

7) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$

8) $(x^2 + y)dx = xdy$

9) $xdy + ydx = x \sin x \, dx$

Page 24-25)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y' - 3y \tan x = 2$

2) $y' + 2y = -e^{-x}$

3) $y' - y \cot x = \frac{1}{\sin x}$

4) $(1 + x)y' + y = \sqrt{x}$

5) $(1 + e^x)dy + (ye^x + e^{-x})dx = 0$

6) $xdy + ydx - x^2 \cos x \, dx = 0$

Page 26)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y' - y = xy^5$

2) $3xy' + y = -x^2y^4$

3) $y' + 2xy = -y^4x$

4) $xdy = \left(y + xy^3(1 + \ln x)\right)dx$

5) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

Page 27)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$, $y_1 = -x^2$

2) $y' - y + y^2 = e^{2x}$, $y_1 = e^x$

3) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$, $y_1 = \frac{1}{x}$

Page 29)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y - xy' = \sqrt{1 + y'^2}$

2) $y = xy' + y'^3$

3) $y = xy' + \sin(y')$

4) معادله دیفرانسیل کلروئی بسازید که یک جواب استثنائی آن $y = x - x^3$ باشد.

Page 30-32)

1) مسیرهای متعامد منحنی های زیر را بدست آورید :

a) $y^2 = 4(x - a)$

b) $x^2 - y^2 = a$

c) $x^2 + y^2 = 2ax$

d) $y = ax^2 + 2$

e) $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$

2) نشان دهید دسته مسیر متعامد $y = ax^n$ عبارتست از $x^2 + ny^2 = c$.

3) مقدار k را طوری بیابید که سهمی های $y = cx^2 + k$ مسیرهای متعامد بیضی های $x^2 + 2y^2 = y + a$ باشند.

4) مقدار n را طوری بیابید که منحنی های $x^n + y^n = a$ مسیرهای متعامد $y(1-bx) = x$ باشند.

5) نشان دهید مسیرهای متعامد $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1$ متعلق به همین خانواده است.

6) مقدار p را طوری پیدا کنید که دسته منحنی های $x^p + y^p = c^p$ و $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ برهم عمود باشند.

7)مقدار b را چنان بیابید که دسته منحنی های $cy^2 = x^3$ و $2x^2 + by^2 = k^2$ برهم عمود باشند.

8) دسته مسیرهائی را که هر یک از خانواده منحنی های زیر را با زاویه 45 قطع میکنند بیابید :

a) $x^2 + y^2 = a^2$

b) $x - 2y = a$

9) مسیرهای هم خانواده منحنی $y = ax$ را به ازای زاویه های $30°$ و $45°$ بیابید.

10) نشان دهید مسیرهای هم زاویه خانواده منحنی های $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$ به ازای زاویه $60°$، $y^2 = c(x - y\sqrt{3})$ میباشد.

11) اگر معادله یک خانواده منحنی بفرم قطبی بیان شده باشد که معادله دیفرانسیل دسته مسیر اصلی بفرم $F\left(r, \theta, \frac{dr}{d\theta}\right) = 0$ است ، معادله دسته مسیر متعامد به شکل $F\left(r, \theta, -r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = 0$ بیان میشود. مسیرهای قائم بر منحنی های زیر را بدست آورید :

a) $r = a\theta$

b) $r^2 = a\cos(2\theta)$

c) $r = a\cos\theta$

d) $r = a(\sin\theta - 1)$

e) $r = a(1 + \sin\theta)$

f) $r = a(\sec\theta + \tan\theta)$

Page 34)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $y'' = y'^3 + y'$

2) $yy'' = 2y'^2 - 2y'$

3) $yy'' + y'^2 = y^2$

4) $xy'' + y' = 0$

5) $(1 + x^2)y'' + xy' = 0$

6) $y'' + y'^3 \cos y = 0$

7) $yy'' = 2y'^2$

8) $y'' + 9y' = 0$

9) $y'' + \left(\frac{1+y}{y}\right) y'^2 = 0$

10) $y'' - \frac{3}{x} y' = x^3$

11) $yy'' + y'^2 - 2yy' = 0$

Page 40-41)

1) آیا توابع $f(x) = |x|, g(x) = x$ در فاصله $(-2,2) - \{0\}$ مستقل اند یا وابسته ؟

2) درتوابع ارائه شده در تمرین 1 نشان دهید که رونسکی آنها صفر است.

3) ابتدا نشان دهید e^{-3x}, e^{4x} جوابهای معادله $y'' - y' - 12y = 0$ در فاصله $(-\infty, +\infty)$ میباشند ، سپس جوابهای عمومی رابدست آورید.

4) ابتدا نشان دهید $\sinh 2x , \cosh 2x$ جوابهای معادله $y'' - 4y = 0$ در فاصله $(-\infty, +\infty)$ میباشند ، سپس جوابهای عمومی رابدست آورید.

5) دو تابع مثال بزنید که وابسته بوده ورونسکی آنها غیر صفر باشد. آیا میشود چنین چیزی پیدا کرد؟

6) از توابع زیر مستقل و وابسته ها را در فاصله $(-\infty, +\infty)$ مشخص نمائید:

a) $f_1(x) = x , f_2(x) = x^2$

b) $f_1(x) = 0 , f_2(x) = x$

c) $f_1(x) = e^x \, , f_2(x) = 5$

d) $f_1(x) = \sin^2 x \, , f_2(x) = \cos^2 x$

e) $f_1(x) = x - 1 \, , f_2(x) = x$

f) $f_1(x) = 2 + x \, , f_2(x) = 2 + |x|$

g) $f_1(x) = e^x \, , f_2(x) = e^{-x}$

h) $f_1(x) = \cos^2 x \, , f_2(x) = \cos 2x$

Page 42-44)

در معادلات زیر ابتدا جواب مستقل دوم را بدست آورید و سپس جواب عمومی معادله را بنویسید :

1) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y_1 = \cos x \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y_1 = \cosh x \end{cases}$

3) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y_1 = e^x \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \\ y_1 = x \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 3y = 0 \\ y_1 = x + 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y_1 = x \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x^2 + x)y'' + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = 0 \\ y_1 = e^x \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 y'' + xy' - 4y = 0 \\ y_1 = x^2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \\ y_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases}$

10) $\begin{cases} (x-1)y'' - xy' + y = 0 \\ y_1 = x \end{cases}$

Page 47)

1) معادلات زیر را حل نمائید :

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$

b) $y'' - 16y = 0$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$

d) $y'' - y' + y = 0$

e) $y'' + 10y' + 25y = 0$

f) $y'' + y = 0$

2) نشان دهید جواب عمومی معادله $y'' - y = 0$ بصورت $y_g = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x$ است.

Page 50-51)

1) در معادله دیفرانسیل همگن اویلر $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ نشان دهید که با فرض $y = x^m$ ، به معادله $am(m-1) + bm + c = 0$ میرسیم ، که با فرض سه حالت برای آن خواهیم داشت:

$\Delta > 0 \rightarrow m_1, m_2 \rightarrow y_g = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$,

$\Delta = 0 \rightarrow m_1 = m_2 = m \rightarrow y_g = c_1x^m + c_2x^m \ln x$,

$\Delta < 0 \rightarrow m = \alpha \pm i\beta \rightarrow y_g = x^\alpha(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x))$

2) معادلات زیر را حل نمائید :

a) $x^2y'' + 3xy' - 15y = 0$

b) $4x^2y'' + 16xy' + 9y = 0$

c) $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$

d) $x^2y'' - 6y = 0$

e) $xy'' + 4y' = 0$

f) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

g) $x^2y'' - 3xy' + 20y = 0$

h) $x^2y'' - 5xy' + 25y = 0$

i) $x^2y'' + xy' + 50y = 0$

j) $x^2y'' = y - xy'$

k) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

3) نشان دهید در معادله $y'' + f(x)y = 0$ اگر $\frac{f'}{f\sqrt{f}}$ مقدار ثابتی باشد میتوان معادله رابه معادله ای با ضرائب ثابت تبدیل کرد.

4) نشان دهید معادله $y'' + f(x)y = 0$ اگر $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^2}$ که در آن a , b ثابت میباشند ، را میتوان به معادله ای با ضرائب ثابت تبدیل کرد و بالعکس.

5) نشان دهید در معادله $y'' + f(x)y' + ay = 0$ که a مقدار ثابتی است ، اگروتنها اگر f مقدار ثابتی باشد میتوان معادله رابه معادله ای با ضرائب ثابت تبدیل کرد.

6) در معادله $y'' + x^my = 0$ مقدار m را طوری بیابید که معادله قابل تبدیل به ضرائب ثابت باشد.

7) در معادله $y'' + (x^2-1)^my' + 5y = 0$ مقدار m را طوری بیابید که معادله قابل تبدیل به ضرائب ثابت باشد.

Page 54-55)

1) معادله $2y'' + y' - 21y = f(x)$ را با $f(x)$ متناظر حل نمائید:

a) $f(x) = 4e^{3x}$ b) $f(x) = e^{-3x}$

c) $f(x) = e^{-7x}$ d) $f(x) = \sin x$

2) معادله $9y'' + 12y' + 4y = f(x)$ را با $f(x)$ متناظر حل نمائید:

a) $f(x) = 5e^{3x}$ b) $f(x) = e^{2x}$ c) $f(x) = e^{-\frac{2}{3}x}$

3) معادله $y'' + 9y = f(x)$ را با $f(x)$ متناظر حل نمائید:

a) $f(x) = \sin 3x$ b) $f(x) = \cos 3x$ c) $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = \cos x$ e) $f(x) = \sin 3x + \sin x$ f) $f(x) = \cos x + \sin x$

4) معادله $-y" - y' + 2y = f(x)$ را با $f(x)$ متناظر حل نمائید:

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = -3$ c) $f(x) = 4x^2 + 10x - 1$

5) معادله $y" - 4y' = f(x)$ را با $f(x)$ متناظر حل نمائید:

a) $f(x) = 8$ b) $f(x) = 8x - 1$ c) $f(x) = -12x^2$

6) معادله $y" + y = \sin x + 6e^x + 5 - 3x$ را حل نمائید .

Page 57)

1) معادلات زیر را حل نمائید :

a) $x^3y" + x^2y' + xy = 1$

b) $(x^2 - 1)y" - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$

c) $(x^2 + x)y" + (2 - x^2)y' - (2 + x)y = x(x + 1)^2$

d) $y" + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

e) $xy" - y' = x^3 - x$

f) $(1 - x)y" + xy' - y = e^x(1 - x)^2$

g) $y" + y = x^2 + x + 1$

h) $y" - y = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$

i) $(1 + x)y" - (1 + x^2 \ln x)y' - x(1 - x \ln x)y = e^x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

2) اگر در معادله $y" + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ داشته باشیم : $R(x) = W(y_1, y_2) \neq 0$

در اینصورت داریم : $y_p = y_2 \int y_1 dx - y_1 \int y_2 dx$

Page 61)

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید :

1) -1 2) $1-7e^{-5x}$ 3) $e^{-x}+\sin 3x$

4) $\sin^2(5x)$ 5) $\cosh^2(5x)$

Page 63)

1) نشان دهید اگر $L[f(x)]=F(p)$ آنگاه $L[f(x)\cosh(ax)]=\frac{1}{2}[F(p+a)+F(p-a)]$

وفرمولی مشابه برای $L[f(x)\sinh(ax)]$ بدست آورید.

2) ثابت کنید برای $L[f(x)]=F(p)$ داریم : $\lim_{p\to+\infty}F(p)=0$

3) تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید :

a) xe^{5x} b) $e^{2x}\sin 3x$ c) x^4e^{-3x}

d) $x(e^x+e^{-4x})^2$ e) $e^x\sin^2 x$ f) $\frac{\cosh x}{e^x}$

Page 65-67)

1) هرگاه $L[f(x)]=F(p)$ نشان دهید : $L\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]=\frac{F(p)}{p}$

2) هرگاه $L[f(x)]=F(p)$ نشان دهید : $L\left[\int_0^x\int_0^t f(u)dudt\right]=\frac{F(p)}{p^2}$

3) هرگاه $L[f(x)]=F(p)$ نشان دهید : $L\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]=\frac{F(p)}{p}+\frac{1}{p}\int_a^0 f(x)dx$

4) هرگاه $L[f(x)]=F(p)$ نشان دهید :

$$L\left[\int_a^x\int_a^t f(u)dudt\right]=\frac{F(p)}{p^2}+\frac{1}{p^2}\int_a^0 f(t)dt+\frac{1}{p}\int_a^0\int_a^t f(u)dudt$$

5) نشان دهید که اگر شرایط مناسب باشد داریم : $L[y''']=p^3L[y]-p^2y_0-py'_0-y''_0$,

به همین ترتیب فرمولی برای $L\left[y^{(n)}\right]$ بیابید.

6) در تمرینات زیر تبدیل لاپلاس معکوس را بدست آورید :

a) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^3}\right]$ b) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+3p}\right]$ c) $L^{-1}\left[\frac{p+1}{p^2-4p}\right]$

d) $L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2p-3}\right]$ e) $L^{-1}\left[\frac{1}{5p+1}\right]$ f) $L^{-1}\left[\frac{10p}{p^2+16}\right]$

g) $L^{-1}\left[\frac{10p}{p^2-25}\right]$ h) $L^{-1}\left[\frac{p-1}{p^2+2}\right]$ i) $L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+p-20}\right]$

j) $L^{-1}\left[\frac{p-3}{(p-\sqrt{3})(p+\sqrt{3})}\right]$ k) $L^{-1}\left[\frac{p}{(p-2)(p-3)(p-6)}\right]$ l) $L^{-1}\left[\frac{p-1}{p^2(p^2+1)}\right]$

7) معادلات زیر را در نقطه $x_0 = 0$ حل نمائید :

a) $y' - 1 = y \quad , \qquad y_0 = 0$

b) $y' - y = \sin x \quad , \qquad y_0 = 0$

c) $y'' + 5y' + 4y = 0 \quad , \qquad y_0 = 1 \ , \qquad y'_0 = 0$

d) $y'' - 6y' + 9y = 0 \quad , \qquad y_0 = 0 \ , \qquad y'_0 = 1$

e) $y'' - 4y' + 4y = x^3 e^{2x} \quad , \qquad y_0 = 0 \ , \qquad y'_0 = 0$

f) $y'' + y = \sin x \quad , \qquad y_0 = 1 \ , \qquad y'_0 = -1$

g) $y'' - y = e^x \sinh x \quad , \qquad y_0 = 0 \ , \qquad y'_0 = 0$

Page 69-70)

1) تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید :

a) xe^{5x} b) $\frac{1-\cos 3x}{x}$ c) $x\cos 2x$

d) $xe^{-3x}\sin 2x$ e) $\frac{e^{2x}-1}{x}$

2) نشان دهید که اگر $L[f(x)] = F(p)$ آنگاه : $f(x) = xL^{-1}\left[\int_p^{+\infty} F(p)dp\right]$

3) نشان دهید که اگر $L[f(x)] = F(p)$ آنگاه : $f(x) = L^{-1}[F(p)] = -\frac{1}{x}L^{-1}[F'(p)]$

4) هرگاه $f(x)$ بر فاصله $[0,+\infty)$ قطعه قطعه پیوسته واز مرتبه نمائی باشد و $L[f(x)] = \frac{F(p)}{p}$

آنگاه : $f(x) = \int_0^x L^{-1}[F(p)]dx$

5) با توجه به اینکه تابع $x > 0$ و $\ln x$ در $x = 0$ نا پیوسته است و با توجه به ثابت اویلر که $\gamma = 0/5772166 \ldots$ می باشد ، نشان دهید که :

$$L[\ln x] = \lim_{b\to\infty}\lim_{a\to 0}\int_a^b e^{-px}\ln x\,dx = -\frac{\gamma}{p} - \frac{\ln p}{p} \quad , \qquad p > 0$$

Page 71-72)

1) تبدیل لاپلاس را برای تابع جزء صحیح $f(x) = [x]$ محاسبه نمائید.

2) نشان دهید دوره تناوب تابع $mx - [mx]$, $T = \frac{1}{m}$ میباشد و سپس تبدیل لاپلاس آنرا بیابید.

3) در توابع زیر با فرض دوره تناوب $T = 2$ تبدیل لاپلاس را بدست آورید :

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 & -1 \le x < 0 \\ x & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Page 74-75)

1) معادلات انتگرال زیر را حل نمائید :

a) $y + \int_0^x (x-t)y(t)dt = x$

b) $y = 2x - 4\int_0^x y(x-t)\sin t\,dt$

c) $y + \int_0^x y(t)dt = 1$

d) $y = \cos x + \int_0^x e^{-t}y(x-t)dt$

e) $x - 2y = \int_0^x (e^t - e^{-t})y(x-t)dt$

f) $y + 2\int_0^x y(t)\cos(x-t)dt = 4e^{-x} + \sin x$

2) فرض کنید $y = f(x)$ جواب معادله همگن با ضرائب ثابت و شرایط اولیه زیر می باشد :

$$y'' + py' + qy = 0\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 1$$

آنگاه جواب معادله ناهمگن :

$$y'' + py' + qy = g(x)\ ,\quad y(0) = 0\ ,\quad y'(0) = 0$$

عبارتست از:

$$y(x) = (f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

3)معادله زیر را حل کنید :

$$y'' - y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}\ ,\quad y(0) = y'(0) = 0$$

4) خواص ابتدائی ضرب تعمیم یافته را اثبات کنید :

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

c) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

5) ثابت کنید اگر $F(p)$ تبدیل لاپلاس f و $G(p)$ تبدیل لاپلاس g باشد آنگاه :

$$L[f(x) * g(x)] = F(p)G(p).$$

6) تبدیل لاپلاس های زیر را بدست آورید :

a) $L\left(\int_0^x e^{-t}(x-t)^3\, dt\right)$

b) $L\left(\int_0^x \sin t\cos(x-t)\, dt\right)$

c) $L\left(\int_0^x (x-t)^2 \sin t\, dt\right)$

d) $L\left(\int_0^x te^{2(x-t)}\, dt\right)$

e) $L\left(\int_0^x \sinh(x-t)(e^t + e^{-t})\, dt\right)$

f) $L\left(\int_0^x te^{x-t}\, dt\right)$

Page 81-84)

1) معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$ که درآن p یک عدد حقیقی میباشد ، به معادله **لژاندر** معروف است ، نشان دهید رابطه بازگشتی این معادله عبارتست از :

$$a_{n+2}=\frac{(n-p)(n+p+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

a) نشان دهید اگر $p=n$ یک عدد صحیح مثبت باشد یکی از دو سری بدست آمده مختوم به چند جمله ای از درجه n است .اگرچند جمله ایهای حاصل را با $P_n(x)$ نشان دهیم آنگاه این چند جمله ایها را طوری بیابید که در شرط $P_n(1)=1$ صدق کنند که به آنها چندجمله ایهای لژاندر میگویند.

b) نشان دهید که چند جمله ایهای لژاندر از رابطه زیر که به فرمول **رُدریگس** نیز معروف است بدست می آید :
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

c) توابع $P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x),\ P_4(x)$ را بدست آورید.

d) بعضی از خواص چند جمله ایهای لژاندر را که در زیر آمده ودر آنها n عدد طبیعی می باشد را ثابت کنید:

$$\text{I. } (n+1)P_{n+1}(x)+nP_{n-1}(x)=(2n+1)xP_n(x)$$

$$\text{II. } P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x)=(2n+1)P_n(x)$$

$$\text{III. } P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x)$$

e) خاصیت تعامدی چند جمله ایهای لژاندر را ثابت کنید: $\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=0\ ,\quad n\neq m$

f) نشان دهید که اگر $m=n$ داریم : $\int_{-1}^{1}(P_n(x))^2dx=\frac{2}{2n+1}$

g) نشان دهید: $(n+1)\int_{-1}^{1}(P_{n+1}(x))^2dx=(2n+1)\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)\,P_n(x)dx$

h) نشان دهید: $\int_{x}^{1}P_n(t)dt=\frac{1}{2n+1}\big(P_{n-1}(x)-P_{n+1}(x)\big),\quad n=1,2,3,\ldots$

i) با استفاده از فرمول رُدریگس نشان دهید:

$$2^n n!\,P_{n+1}(x)=(2n+1)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u^n+2n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}u^{n-1}$$

که در آن $u=x^2-1$.

2) یک جواب خصوصی برای معادلات زیر بیابید :

a) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$

b) $(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$

c) $(1-x^2)y''-2xy'+20y=0$

3) معادله دیفرانسیل $(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0$ که در آن p یک عدد حقیقی میباشد ، به معادله **چیبیشف** معروف است، نشان رابطه بازگشتی این معادله عبارتست از :

$$a_{n+2}=\frac{n^2-p^2}{(n+2)(n+1)}a_n$$

4) معادله دیفرانسیل $y''-2xy'+2py=0$ که درآن p یک عدد حقیقی میباشد ، به معادله **هرمیت** معروف است ، نشان دهید رابطه بازگشتی این معادله عبارتست از :

$$a_{n+2}=\frac{2(n-p)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

5) معادله $y''+xy=0$ که به معادله **ایری** معروف میباشد را حل نمائید .

6) معادله دیفرانسیل $(1+x)y'=py\,,\;\; p\in R$ را ابتدا به کمک سری حل نموده سپس آنرا به روش مستقیم حل وجوابهای بدست آمده را با شرط اوّلیه $y(0)=1$ مقایسه نمائید.

7) معادلات زیر را حل نمائید :

a) $x^2y''+y'+2y=0$

b) $y''+x^2y'+2xy=0$

c) $y''+y=0$

d) $y'=2xy$

e) $y'+y=1$

Page 86-87)

1) نشان دهید : $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2) نشان دهید که برای $\alpha > -1$ داریم : $L[x^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$

3) تعریف مناسبی برای $\left(\frac{-1}{2}\right)!$ ، $\left(\frac{1}{2}\right)!$ و $\left(\frac{3}{2}\right)!$ بدست آورید .

4) نشان دهید برای هر عدد صحیح و غیر منفی n داریم :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

Page 93-94)

معادلات زیر را حل نمائید :

1) $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$
2) $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$
3) $3x^2y'' + 4xy' = 0$
4) $x^2y'' - xy' + y = 0$
5) $x^2y'' + xy' = 0$
6) $(x-1)y'' + y' + xy = 0$
7) $x(x-1)y'' + 2y' + x^2y = 0$
8) $(x^2+1)y'' + y' - 2y = 0$
9) $x^2(x+1)y'' + (x-1)y' + y = 0$
10) $(x^2 - x - 2)y'' + xy' + y = 0$

11) $(x^3 - 3x - 2)y'' + 2xy' + y = 0$

12) $4x^2y'' + y' = 0$

13) $4xy'' + 2y' + y = 0$

14) $2x^2y'' + x(2x + 1)y' + 2xy = 0$

15) $xy'' + (3 + 2x)y' + 4y = 0$

16) $(x + 3x^3)y'' + 2y' - 6xy = 0$

17) $x(1 - x)y'' + 3y' - 2y = 0$

18) $(2x^3 + 6x^2)y'' + (x^2 + 9x)y' - 3y = 0$

19) $4x(x - 1)y'' + 2(1 - 2x)y' + y = 0$

20) $x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0$

21) $xy'' + 2y' + xy = 0$

22) $x^2y'' + x^2y' - xy = 0$

23) $4x^2y'' - x^2y' + (1 + 2x)y = 0$

Page 97)

1) نشان دهید که $y = \sqrt{x}J_0(\sqrt{x})$ در معادله زیر صدق میکند : $4x^2y'' + (x + 1)y = 0$
وسپس جواب خصوصی که در شرط $y(4) = 1$ صدق میکند را پیدا کنید.

2) نشان دهید که $y = \frac{1}{x}J_1(x)$ در معادله زیر صدق میکند : $xy'' + 3y' + xy = 0$ وسپس جواب خصوصی که در شرط $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ صدق میکند را پیدا کنید.

3) نشان دهید که $y = x^pJ_p(x)$ یک جواب خصوصی معادله زیر است :

$$xy'' + (1 - 2p)y' + xy = 0 \quad , \qquad x > 0$$

4) نشان دهید : $4J_p''(x) = J_{p-2}(x) - 2J_p(x) + J_{p+2}(x) \, , \qquad p \geq 2.$

Page 99-100)

1) ثابت کنید :

a) $(1+x)^p = F(-p,b,b,-x)$

b) $\ln(x+1) = xF(1,1,2,-x)$

c) $Arctgx = xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right)$

d) $ArcSinx = xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right)$

e) $e^x = \lim_{b\to\infty} F\left(a,b,a,\frac{x}{b}\right)$

f) $e^{-x} = \lim_{b\to\infty} F\left(a,b,a,\frac{-x}{b}\right)$

g) $\sin x = x\left(\lim_{a\to\infty} F\left(a,a,\frac{3}{2},\frac{-x^2}{2a^2}\right)\right)$

h) $\cos x = \lim_{a\to\infty} F\left(a,a,\frac{1}{2},\frac{-x^2}{2a^2}\right)$

i) $\ln 2 = F(1,1,2,-1)$

j) $\pi = 4F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-1\right)$

k) $\pi = 3F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{4}\right)$

l) $e = \lim_{b\to\infty} F\left(a,b,a,\frac{1}{b}\right.$